Concours Pour l'Admission d'Élèves Titulaires Statisticiens Économistes

Option Mathématiques

JUIN 1995

Première Composition de Mathématiques

(Durée : 4 Heures)

9 pages

Notations et Introduction. — On note $\mathbb{N}$ les entiers positifs et $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\}$ les entiers strictement positifs, $\mathbb{Z}$ les entiers relatifs, $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} - \{0\}$, $\mathbb{R}$ les nombres réels et $\mathbb{C}$ les nombres complexes.

Si n et $d \in \mathbb{Z}^*$, on dit que d divise n et on note $d|n$ s'il existe $d' \in \mathbb{Z}^*$ tel que $dd' = n$, sinon on note $d \not| n$.

Si a, b sont des éléments de $\mathbb{Z}$ et si $m \in \mathbb{N}^*$, on note $a \equiv b\ (m)$ si $m|(a-b)$. On note $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ l'anneau quotient de $\mathbb{Z}$ par la relation d'équivalence précédente. On note (a, b) le plus grand commun diviseur de a et de b.

Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers et soit $\mathcal{P}[\leq n]$ l'ensemble des nombres premiers inférieurs ou égaux à n (par exemple $\mathcal{P}[\leq 12] = \{2, 3, 5, 7, 11\}$).

Soit f une application de $\mathcal{P}$ dans $\mathbb{C}$. On dit que le produit infini $\prod_{p \in \mathcal{P}} f(p)$ converge (resp. converge absolument) si la suite $n \longrightarrow \prod_{p \in \mathcal{P}[\leq n]} f(p)$ converge (resp. converge absolument) vers une limite $\neq 0$.

On peut utiliser les résultats d'une question non traitée à condition d'indiquer clairement le résultat admis.

Partie 1

On étudie dans cette partie quelques propriétés des séries de terme général $u_n = \frac{a_n}{n^s}$, où $n \geq 1$, $a_n \in \mathbb{C}$, $s \in \mathbb{R}$.

On désignera par s_0, α et c des réels. On suppose $c > 0$. Lorsque la série $\sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{n^s}$ converge, on pose $f(s) = \sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{n^s}$.

1.1. — Montrer que :

a) si la série $\sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{n^s}$ converge absolument pour $s = s_0$ alors elle converge absolument pour tout $s \geq s_0$.

b) si $|a_n| \leq cn^\alpha$ la série $\sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{n^s}$ converge absolument pour $s > \alpha + 1$.

1.2. — Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ deux suites de nombres complexes. On pose $A(N) = \sum_{n=1}^{N} a_n$, $N \in \mathbb{N}^*$.

a) Montrer que : $\sum_{n=1}^{N} a_n v_n = A(N)v_N + \sum_{n=1}^{N-1} A(n)(v_n - v_{n+1})$.

b) On suppose que $|A(N)| \leq cN^{s_0}$ pour tout $N \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'alors la série $\sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{n^s}$ converge pour tout $s > s_0$ et que la convergence est uniforme en s sur $[s_1, +\infty[$, pour tout $s_1 > s_0$.

1.3. — Soit $s_0 \in \mathbb{R}$, tel que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{n^s}$ converge pour $s = s_0$. Montrer qu'elle converge pour tout $s \geq s_0$ et que la convergence est uniforme en s sur $[s_0, +\infty[$ (on pourra poser $b_n = \frac{a_n}{n^{s_0}}$, $c_n = \frac{1}{n^{s-s_0}}$ et $B(N) = \sum_{n=1}^{N} \frac{a_n}{n^{s_0}}$).

1.4. — Montrer que si la série $\sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{n^s}$ converge pour tout $s > s_0$, elle définit une fonction, $f(s)$, indéfiniment dérivable sur $]s_0, +\infty[$ et de plus $\forall k \in \mathbb{N}$, $\frac{d^k}{ds^k} f(s) = \sum_{n\geq 1} \frac{(-\log n)^k a_n}{n^s}$.

En déduire que : $\left(\exists\, \epsilon > 0\right)$, $\left(\exists\, g, C^\infty \text{ sur } I_\epsilon =]s_1 - \epsilon, s_1 + \epsilon[\right)$ tels que $f(s) = (s - s_1)g(s)$ sur I_ϵ.

1.5. — Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ deux suites de nombres complexes. On suppose que les séries $f(s) = \sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{n^s}$ et $g(s) = \sum_{n\geq 1} \frac{b_n}{n^s}$ convergent absolument pour $s = s_0$. Soit $c_n = \sum_{\substack{d|n \\ d\in\mathbb{N}}} a_d \cdot b_{n/d} = \sum_{\substack{dd'=n, \\ d,d'\in\mathbb{N}}} a_d \cdot b_{d'}$.

Montrer que la série $h(s) = \sum_{n\geq 1} \frac{c_n}{n^s}$ converge absolument pour $s = s_0$ et que l'on a $h(s) = f(s)g(s)$ pour tout $s \geq s_0$.

Si de plus les séries $f(s)$, $g(s)$ et $h(s)$ convergent pour tout $s > s_1$ avec $s_0 > s_1$, alors on admettra que pour tout $s > s_1$ on a encore $h(s) = f(s)g(s)$.

1.6. — On dit qu'une application ρ de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{C}$ est *multiplicative* si :

$$\begin{cases} \rho(1) = 1 \\ \forall n_1, n_2 \in \mathbb{N}^*,\ (n_1, n_2) = 1 \implies \rho(n_1 \cdot n_2) = \rho(n_1)\rho(n_2) \end{cases}$$

Montrer que si ρ et ψ sont multiplicatives alors l'application, ϕ, de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbf{C}$ définie par $\phi(n) = \sum_{\substack{d|n \\ d\in\mathbb{N}}} \rho(d)\psi(\frac{n}{d})$ est multiplicative. On pose $\phi = \rho \star \psi$.

1.7. — Soit ρ une application de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{C}$. On dit que ρ est *totalement multiplicative* si :

$$\begin{cases} \rho(1) = 1 \\ \forall n_1, n_2 \in \mathbb{N}^*, \quad \rho(n_1 \cdot n_2) = \rho(n_1)\rho(n_2) \end{cases}$$

Soit $s \in \mathbf{R}$ tel que la série $L(s, \rho) = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\rho(n)}{n^s}$ converge absolument. On suppose ρ totalement multiplicative. Montrer que :

a) si $p \in \mathcal{P}$, la série $\sum_{k\geq 0} \frac{\rho(p^k)}{p^{ks}}$ converge absolument vers $\frac{1}{1 - \frac{\rho(p)}{p^s}}$,

b) le produit infini $\prod_{p\in\mathcal{P}} \frac{1}{1 - \frac{\rho(p)}{p^s}}$ converge absolument vers $\sum_{n\geq 1} \frac{\rho(n)}{n^s}$.

Partie 2

Soit s un réel. Pour $s > 1$, on définit $\zeta(s) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^s}$. On veut étudier le comportement de la fonction $\zeta(s)$ au voisinage de 1.

2.1. — Montrer que pour $s > 1$, $\zeta(s)$ existe et que $\zeta(s) > 1$.

2.2. — Montrer que le produit infini $\prod_{p\in\mathcal{P}} \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}}$ converge pour $s > 1$ et que $\zeta(s) = \prod_{p\in\mathcal{P}} \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}}$

2.3. — Montrer que, pour $s > 1$, $(1 - 2^{1-s})\zeta(s) = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s}$.

On pose $\zeta_2(s) = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s}$.

2.4. — Montrer que la fonction $\zeta_2(s)$ est définie pour $s > 0$ et que $\lim_{\substack{s\to 1\\ s>1}} (s-1)\zeta(s) = 1$ (on rappelle que $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$).

2.5. — Montrer que $\lim_{\substack{s\to 1\\ s>1}} \frac{\ln\zeta(s)}{\ln(s-1)} = -1$.

2.6. — Montrer que, pour $s > 1$, $\ln\zeta(s) = \sum_{p\in\mathcal{P}} \frac{1}{p^s} + R(s)$ où $R(s)$ est une fonction bornée sur $I =]1, \infty[$.

2.7. — Déduire des questions **2.5** et **2.6** que l'ensemble $\mathcal{P}$ des nombres premiers est infini (on pourra raisonner par l'absurde).

Partie 3

Soit $1 \leq b \leq 4$ un entier. On montre dans cette partie qu'il existe une infinité de nombres premiers dans la progression arithmétique $(5a+b)_{a\in\mathbf{N}}$.

Pour cela on étudie pour $j \in \{0,1,2,3\}$ le comportement au voisinage de $s=1$ des fonctions $L(s,\chi_j) = \sum_{n\geq 1} \frac{\chi_j(n)}{n^s}$ où χ_j est une fonction multiplicative à valeurs dans les racines quatrièmes de l'unité qui sera définie ci-dessous.

Si $z \in \mathbb{C}$, on note $\overline{z}$ son conjugué.

3.1. — Soit $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^*$ le sous groupe multiplicatif des éléments inversibles pour la multiplication de $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})$. Montrer que $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^*$ est un groupe cyclique, donner son ordre et un générateur de ce groupe.

On notera $\tilde{x}$ la classe de $x \in \mathbf{N}$ dans $\mathbf{Z}/5\mathbf{Z}$ et g un générateur du groupe multiplicatif $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^*$. On définit une application ℓ de $\mathbf{N}-5\mathbf{N}$ dans $\{0,1,2,3\}$ par la relation $\tilde{x} = g^{\ell(x)}$. Cette application dépend du choix de g.

Soit $\omega = \exp\left(\frac{2i\pi}{4}\right)$ une racine primitive 4-ième de l'unité. On pose si $x \in \mathbf{N}$ et $(x,5)=1$, $\chi_1(x) = \omega^{\ell(x)}$.

Soit μ_4 l'ensemble des racines 4-ièmes de l'unité. Pour $j \in \{0,1,2,3\}$, on définit des fonctions χ_j de $\mathbf{N}$ dans $\mu_4 \cup \{0\}$: $\begin{cases} \text{si } (x,5)=1, & \chi_j(x) = \chi_1(x)^j \\ \text{si } (x,5)\neq 1, & \chi_j(x) = 0 \end{cases}$

On notera $\mathcal{X}(5)$ l'ensemble de ces fonctions. Montrer que $\mathcal{X}(5)$ ne dépend pas du choix du générateur g et que :

a) $\forall\, j \in \{0,1,2,3\}$, et $\forall x \in \mathbf{N}$, $\chi_j(5+x) = \chi_j(x)$,

b) $\forall\, j \in \{0,1,2,3\}$, χ_j est totalement multiplicative,

c) Si $1 \leq b \leq 4$ et $n \in \mathbf{N}$, $\chi_0(5n+b) = 1$, $\chi_2(5n+b) \in \{-1,0,+1\}$,

$\chi_1(5n+b) = \overline{\chi_3(5n+b)}$,

d) Si $\chi_j \neq \chi_0$ et $k \in \mathbf{N}$, $\sum_{n=k}^{k+4} \chi_j(n) = 0$,

e) Si $k \in \mathbf{N}$, $\sum_{n=k}^{k+4} \chi_0(n) = 4$,

f) $\displaystyle\sum_{\chi\in\mathcal{X}(5)}\chi(n)=\begin{cases}0 & \text{si } n\not\equiv 1\ (5)\\ 4 & \text{si } n\equiv 1\ (5)\end{cases},\quad n\in\mathbb{N},$

g) $\displaystyle\frac{1}{4}\sum_{\chi\in\mathcal{X}(5)}\overline{\chi(h)}\chi(x)=\begin{cases}1 & \text{si } x\equiv h\ (5)\\ 0 & \text{si } x\not\equiv h\ (5)\end{cases},\quad h \text{ et } x\in\mathbb{N}-5\mathbb{N}.$

3.2. — Soit $\chi\in\mathcal{X}(5)$. Montrer que :

a) si $\chi\neq\chi_0$, la série $L(s,\chi)=\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{\chi(n)}{n^s}$ converge pour $s>0$ et converge absolument pour $s>1$.

b) Pour $s>1$, la série $L(s,\chi_0)=\displaystyle\sum_{\substack{n\geq 1\\(n,5)=1}}\frac{1}{n^s}$ converge, et :

$$L(s,\chi_0)=\prod_{p\in\mathcal{P}-\{5\}}\frac{1}{1-\dfrac{\chi_0(p)}{p^s}}=\prod_{p\in\mathcal{P}-\{5\}}\frac{1}{1-\dfrac{1}{p^s}}=(1-5^{-s})\zeta(s)$$

En déduire que $\displaystyle\lim_{\substack{s\to 1\\ s>1}}\frac{\ln L(s,\chi_0)}{\ln(s-1)}=-1.$

3.3. — Soit, pour $\chi\in\mathcal{X}(5)$ et $s>1$, $G(s,\chi)=\displaystyle\sum_{p\in\mathcal{P}}\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k}\frac{\chi(p^k)}{p^{ks}}$.

a) Montrer que $G(s,\chi)=\displaystyle\sum_{p\in\mathcal{P}}\frac{\chi(p)}{p^s}+R(s,\chi)$ où $R(s,\chi)$ est une fonction bornée pour $s\geq 1$.

b) Montrer que $\displaystyle\sum_{\chi\in\mathcal{X}(5)}G(s,\chi)=4\sum_{p\in\mathcal{P}}\sum_{\substack{k\geq 1\\ p^k\equiv 1\ (5)}}\frac{1}{k\cdot p^{ks}}$.

3.4. — Montrer que, pour $s>1$, $e^{G(s,\chi)}=L(s,\chi)$.

Soit $F(s)=\displaystyle\prod_{\chi\in\mathcal{X}(5)}L(s,\chi)$. En déduire que $F(s)$ est un réel >1 pour $s>1$.

3.5. — Montrer qu'il y a au plus une fonction $\chi\in\mathcal{X}(5)$, $\chi\neq\chi_0$, telle que $L(1,\chi)=0$ (on pourra montrer que $|L(1,\chi)|<+\infty$ si $\chi\neq\chi_0$ et que $\displaystyle\lim_{\substack{s\to 1\\ s>1}}(s-1)L(s,\chi_0)\neq 0$).

3.6. — On dit que la fonction $\chi \in \mathcal{X}(5)$ est complexe s'il existe un $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\chi(n) \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$, autrement dit : $\exists\, n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\chi(n) \notin \{-1, 0, +1\}$. On définit, si f est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{C}$, l'application $\overline{f}$ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{C}$ par $\overline{f}(n) = \overline{f(n)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que, si χ est complexe, $L(1, \chi) \neq 0$ (on pourra montrer que $\chi \in \mathcal{X}(5) \Longleftrightarrow \overline{\chi} \in \mathcal{X}(5)$ et que $L(s, \overline{\chi}) = \overline{L(s, \chi)}$).

3.7. — On suppose que la fonction $\chi \in \mathcal{X}(5)$ est réelle non triviale c'est à dire que $\chi(n) \in \{-1, 0, +1\}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\chi \neq \chi_0$.

Soit θ l'application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{C}$ telle que $\theta(n) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que :

a) $(\chi \star \theta)(n) \geq 0, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*$

b) $(\chi \star \theta)(n^2) \geq 1, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*$

où $\star$ est défini à la question **1.6.**

(On pourra remarquer qu'il suffit de montrer a) et b) pour $n = p^k$ avec $p \in \mathcal{P}$, et de discuter suivant les valeurs de $\chi(p)$).

3.8. — Soit $x \in \mathbb{R}, x \geq 1$ et soit $\chi \in \mathcal{X}(5)$ réelle non triviale. Montrer que :

a) $\displaystyle\sum_{1 \leq n \leq x} (\chi \star \theta)(n) = \sum_{\substack{dd' \leq x \\ d, d' \in \mathbb{N}}} \chi(d)\theta(d').$

b) $\displaystyle\sum_{1 \leq n \leq x} (\chi \star \theta)(n) = Z_1 + Z_2 - Z_3$, avec $Z_1 = \sum_{\substack{d \leq \sqrt{x} \\ d \in \mathbb{N}}} \chi(d) \sum_{\substack{d' \leq (x/d) \\ d' \in \mathbb{N}}} \theta(d')$,

$Z_2 = \displaystyle\sum_{\substack{d \leq \sqrt{x} \\ d \in \mathbb{N}}} \theta(d) \sum_{\substack{d' \leq (x/d) \\ d' \in \mathbb{N}}} \chi(d')$ et $Z_3 = \Big(\sum_{\substack{d \leq \sqrt{x} \\ d \in \mathbb{N}}} \chi(d)\Big)\Big(\sum_{\substack{d' \leq \sqrt{x} \\ d' \in \mathbb{N}}} \theta(d')\Big).$

c) En déduire que $\displaystyle\sum_{1 \leq n \leq x} (\chi \star \theta)(n) = xL(1, \chi) + (\sqrt{x})r(x)$, où $r(x)$ est une fonction bornée pour $x \geq 1$.

3.9. — Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n \geq 1} \frac{(\chi \star \theta)(n) - L(1, \chi)}{n^s}$ converge pour $s > \frac{1}{2}$ (on pourra poser $a_n = (\chi \star \theta)(n) - L(1, \chi)$ et $A(N) = \displaystyle\sum_{1 \leq n \leq N} a_n$, puis montrer que $\dfrac{|A(N)|}{\sqrt{N}}$ est borné).

3.10. — On veut montrer que $L(1,\chi) \neq 0$ pour χ réelle non triviale. On raisonnera par l'absurde. On suppose donc que $L(1,\chi) = 0$. Montrer alors que :

a) $\sum_{n\geq 1} \frac{(\chi \star \theta)(n)}{n^s}$ converge absolument pour $s > \frac{1}{2}$,

b) pour $s > \frac{1}{2}$, $\sum_{n\geq 1} \frac{(\chi \star \theta)(n)}{n^s} = (1-2^{1-s})^{-1}\zeta_2(s)L(s,\chi)$,

c) pour $s > \frac{1}{2}$, $\sum_{n\geq 1} \frac{(\chi \star \theta)(n)}{n^s} \geq \sum_{n\geq 1} \frac{(\chi \star \theta)(n^2)}{n^{2s}} \geq \zeta(2s)$,

d) $\lim_{\substack{s\to 1/2 \\ s>1/2}} (1-2^{1-s})^{-1}\zeta_2(s)L(s,\chi) = C < +\infty$ et $\lim_{\substack{s\to 1/2 \\ s>1/2}} \zeta(2s) = +\infty$.

Conclure.

3.11. — Si $h \in \mathbb{N} - 5\mathbb{N}$, montrer que :

$$\sum_{\substack{p\in\mathcal{P} \\ p\equiv h\,(5)}} \frac{1}{p^s} = \frac{1}{4}\sum_{\chi\in\mathcal{X}(5)}\sum_{p\in\mathcal{P}} \frac{\chi(p)\overline{\chi(h)}}{p^s} = \frac{1}{4}\sum_{\chi\in\mathcal{X}(5)} \overline{\chi(h)}G(s,\chi) + R_1(s)$$

où $G(s,\chi)$ est défini à la question **3.3** et où $R_1(s)$ est une fonction réelle bornée pour $s > 1$.

3.12. — Soit $b \in \mathbb{N}$, $1 \leq b \leq 4$. Soit $\mathcal{P}_b = \left\{p \in \mathcal{P};\ p \equiv b\ (5)\right\}$. Montrer que $\lim_{\substack{s\to 1 \\ s>1}} \left[\frac{1}{\ln(s-1)} \sum_{p\in\mathcal{P}_b} \frac{1}{p^s}\right] = -\frac{1}{4}$. En déduire que $\mathcal{P}_b$ est infini.

Montrer qu'il y a une infinité de nombres premiers dans toute progression arithmétique de la forme $a \longrightarrow 5a + b$ avec $(5,b) = 1$.